الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأوّل $u_0=1$
ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=7u_n+8$.

1) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n=7^{n+1}-4$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=1+7+7^2+......+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n.

ب) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

3) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5.

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، (P) مستو تمثيله الوسيطي:
$$\begin{cases} x=-t-2\lambda+2 \\ y=3t+4\lambda-3 \\ z=3t+4\lambda-1 \end{cases}$$
حيث t و λ عددان حقيقيان .

1) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2) ليكن α عددا حقيقيا من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$، ولتكن (E_α) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث
$$x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}=0 \ .$$

أ) بيّن أنّ: من اجل كل α من المجال السابق ، (E_α) هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω_α بدلالة α ونصف قطرها R.

ب) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي α الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (E_α) .

3) في الحالة التي يكون فيها المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (E_α)
عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة ω_α والعمودي على المستوي (P)
واستنتج إحداثيات I نقطة تماس (E_α) مع المستوي (P).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) اكتب العدد $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A , B , C و I ذات اللواحق : $z_A=\frac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$.

1) اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري .

2) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عيّن نسبته وزاويته.

ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76\,;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x - \ln x} \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،

ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$.

3) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = x - \ln x$

أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $h(x) > 0$،

واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

ب) ارسم (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)

5) لتكن الدالة F المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

– بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\dfrac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

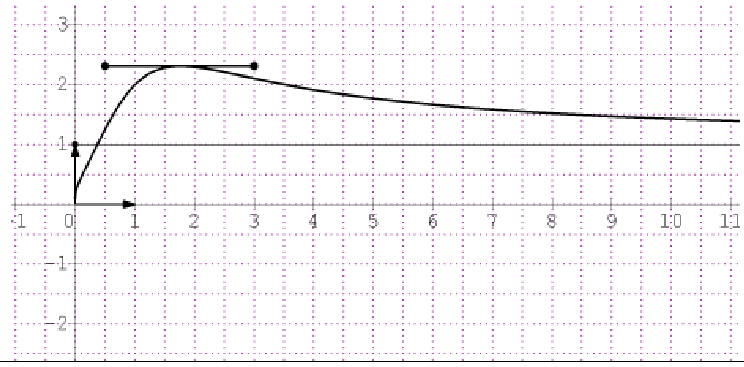
– اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة	
الموضـــــــــــوع الثاني	مجزأة	المجموع
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) برهان بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 7^{n+1} - 4$.	0.75	0.75
أ) حساب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{7^{n+1}-1}{6}$	0.25	1.25
ايجاد علاقة بين S_n و S'_n : $3S'_n = 7S_n - 4(n+1)$	0.50	
ب) استنتاج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18\times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.	0.50	
2) أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5. $7^{4k} \equiv 1[5]$; $7^{4k+1} \equiv 2[5]$; $7^{4k+2} \equiv 4[5]$; $7^{4k+3} \equiv 3[5]$ $/ k \in \mathbb{N}$	4×0.25	01
ب) تعيين قيم n $S'_n \equiv 0[5]$ معناه $n \in \{20h+12 \ ;20h+13 \ ;20h+10 \ ;20h+19 \ / h \in \mathbb{N}\}$	4×0.25	01
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P) : $y - z + 2 = 0$	0.75	0.75
2) أ) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - z - \frac{3}{4} = 0$ تكافئ $(x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = 2$	0.50	2.25
(E_α) هي سطح كرة مركزها $\omega_\alpha(\cos\alpha \ ; \sin\alpha \ ; \frac{1}{2})$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$	0.50	
ب) الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (E_α) . $d((p);\omega_\alpha) = \frac{\frac{3}{2} + \sin\alpha}{\sqrt{2}}$	0.50	
اذا كان $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right[$ فإن (P) يقطع (E_α) في دائرة	0.25	
اذا كان $\alpha = \frac{\pi}{6}$ فإن (P) يمس (E_α)	0.25	
اذا كان $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $(P) \cap (E_\alpha) = \{ \ \}$	0.25	
3) التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) $/ t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = t + \frac{1}{2} \\ z = -t + \frac{1}{2} \end{cases}$	0.50	01

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
استنتاج إحداثيات $I(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2})$	0.50	
التمرين الثالث: (05 نقاط)		
I) $\left(\frac{5}{2}+i\right)^2=\frac{21}{4}+5i$	0.25	0.75
الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\frac{21}{4}+5i$ هما $\frac{5}{2}+i\,;-\frac{5}{2}-i$	2×0.25	
1) $z_A=\frac{5}{2}+i$	0.50	0.75
$z_C=-\frac{5}{2}+i$	0.25	
2) $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$	0.50	01
المثلث ABC قائم في B ومتقايس الساقين	0.50	
3) أ) العبارة المركبة للتشابه المباشر: $z'=\frac{1}{2}(1+i)z-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i$	0.75	2.50
نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$	0.50	
ب) $T_n=S\circ S\circ S\circ\dots\circ S=S\left(B;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n;\frac{n\pi}{4}\right)$	0.25	
T_n تحاك معناه $n=4k \quad /k\in\mathbb{N}$	0.50	
العناصره المميزة.		
مركز التحاكي هو B ونسبته معرفة كما يلي :		
اذا كان k زوجيا فان نسبته هي $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ، اذا كان k فرديا فان نسبته هي $-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$	2×0.25	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
I) 1) دراسة اتجاه تغيّر الدالة g .		0.50
$g'(x)=-\frac{x+1}{x^2}$	0.25	
g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$	0.25	
2) بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76\,;1,77[$	0.50	

المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة
01	**0.50**	استنتج إشارة $g(x)$ $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & \alpha & +\infty \\ \hline g(x) & + & 0 & - \end{array}$
0.75	**0.25** **0.25** **0.25**	II) **1)** اثبات أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ التفسير البياني (C_f)يقبل نصف مماس يوازي حامل محور التراتيب
0.50	**0.50**	**2)** اثبات أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$.
01	**0.25** **0.25** **0.50**	**3)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=1$ جدول تغيرات الدالة f . $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \alpha & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & 0 & \nearrow & f(\alpha) & \searrow & 1 \end{array}$
2.25	**0.25** **0.25** **0.25** **0.50**	**4)** أ) $h'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، لدينا $h(x) \geq h(1)$ ومنه $h(x)>0$ الوضع النسبي: $f(x) - 1 = \dfrac{1+\ln x}{x - \ln x}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & \frac{1}{e} & & +\infty \\ \hline f(x)-1 & & - & 0 & + & \end{array}$ (C_f)تحت (Δ) من اجل $x \in \left]0;\dfrac{1}{e}\right[$ ، (C_f)فوق (Δ) من اجل $x \in \left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ ، $(C_f) \cap (\Delta) = \left\{A(\dfrac{1}{e};1)\right\}$

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
ب) الرسم 	01	
5) اثبات أن: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.	0.25	01
من جدول تغيرات الدالة f نجد $f(x) \leq f(\alpha)$.........(1) ، إشارة: $f(x)-(\frac{1}{x}+1)=\frac{(x+1)\ln x}{x-\ln x}$		
من اجل $x \geq 1$ ، $f(x)-(\frac{1}{x}+1) \geq 0$........(2)	0.25	
من (1) و (2) نجد : $\frac{1}{x}+1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$		
- بما ان $F(e)=\int_1^e f(t)\,dt$ فان $F(e)$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1\ ;\ x=e$	0.25	
- حصر $F(e)$ هو : $e \leq F(\mathrm{e}) \leq f(\alpha)(e-1)$	0.25	